

QED 5-10

Matematikk for
grunnskolelærerutdanningen

Bind 2

Fasit kapittel 1 - Kalkulus

Kapittel 1

Oppgave 1. a) en funksjon b) en funksjon c) ikke en funksjon d) ikke en funksjon

Oppgave 2. a) 12,1 b) $\frac{3}{4}$ c) $-3 + \pi$ d) $2 - \sqrt{2}$ e) $3\sqrt{3} - 1$

Oppgave 3. a) $(-5, 7]$ b) $(-\infty, 100)$ c) $(-\infty, \infty)$ d) $(-2, 2)$

Oppgave 4. a) $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $x \in [-12, 12]$ c) $x \in (-1, 1)$ d) $x \in (0, 2)$ e) $x \in (-1, 3)$

Oppgave 5. a) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ b) $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$ c) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ d) $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$ e) $(-\infty, -3] \cup (3, 4)$

Oppgave 6. a) $D_f = [0, \infty)$ b) $D_g = \mathbb{R}$ c) $D_h = [0, \infty)$ d) $D_k = \mathbb{R}$ e) $D_m = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (skrivemåte for «alle reelle tall unntatt -1 ») f) $D_n = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ (alle reelle tall unntatt -3 og 1)

Oppgave 7. a) $f(g(x)) = \sqrt{x+1}$ b) $f(g(x)) = \frac{1}{x^4}$ c) $f(g(x)) = 3x^2 + 2x + 1$

Oppgave 8. a) $f(g(x)) = 3x^2 + 24x + 49$ b) $g(f(x)) = 3x^2 + 5$ c) $g(f(g(x))) = 3x^2 + 24x + 53$

Oppgave 10. a) ∞ b) 0 c) ∞ d) ∞

Oppgave 12. ingen av dem eksisterer

Oppgave 13. a) $x = 0$ og $x = 3$ b) $x = -4$ c) $x = -1$ og $x = \frac{1}{2}$

Oppgave 14. a) kontinuerlig b) ikke kontinuerlig

Oppgave 15. $a = 2$, $b = 0$

Oppgave 16. a) 2 b) 3 c) 0

Oppgave 17. (bruk skjæringssetningen; i a er $f(-2) = -4$ og $f(1) = 2$ og f er kontinuerlig, i b er $g(-1) = -1$ og $g(1) = \frac{1}{3}$ og g er kontinuerlig)

Oppgave 18. *hint:* vis setningen ved å se på $f(x) - c$

Oppgave 19. a) uttrykket er positivt for $x \leq -\frac{1}{3}$ og $x \geq 0$ og negativt for $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$ b) uttrykket er ikke definert for $x = -\frac{1}{3}$ (et kryss her), positivt for $x < -\frac{1}{3}$ og $x \geq 0$ og negativt for $-\frac{1}{3} < x \leq 0$ c) uttrykket er ikke definert for $x = 2$ (et kryss her), positivt for $x < 2$ (0 for $x = 1$) og negativt for $x > 2$

Oppgave 20. a) $(-\infty, -2)$ og $[1, \infty)$ b) $[3, \infty)$

Oppgave 21. a) mulighet I: to løsninger når $b^2 - 4ac > 0$, mulighet II: én løsning når $b^2 - 4ac = 0$ og mulighet III: ingen løsninger når $b^2 - 4c < 0$ b)

eksempler: I: $x^2 - 3x + 2 = 0$, II: $x^2 - 2x + 1 = 0$, III: $x^2 + 1 = 0$ **c)** (eksempler fra b:) I: $f(x)$ er positivt for $x \leq 1$ og $x \geq 2$ (grafene ligger over x -aksen - med nullpunkter $x = 1$ og $x = 2$) og negativt for $1 < x < 2$ (grafene ligger under x -aksen for $1 < x < 2$), II: $f(x)$ er positivt for alle x (grafene ligger over x -aksen, og skjærer x -aksen i $x = 1$), III: $f(x)$ er positivt for alle x (grafene ligger over x -aksen) **d)** I: $a(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$, II: $a(x + \frac{b}{2a})^2$, III: $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

Oppgave 22. a) $x - 1$ b) $x^2 - 2x + 1$ c) $2x^2 - x - 1$

Oppgave 23. a) $2(x + 6)(x - 1)(x + \frac{1}{2})$ b) $[-6, -\frac{1}{2}]$ og $[1, \infty)$

Oppgave 25. a) -5 b) 5 c) 7 d) -18

Oppgave 26. a) 3 b) 6 c) 5

Oppgave 27. b) 4 c) 3 d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{21}{10}$ f) kan se ut som den nærmer seg 2

Oppgave 30. a) $f'(x) = 2x - 4$ b) $f'(x) = 6x + 1$ c) $f'(x) = 3x^2$

Oppgave 31. a) $f'(x) = 12x^3 - 4$ b) $f'(x) = 30x^4 - 12x^3 + 4x + 2$ c) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ d) $f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$ e) $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}$

Oppgave 32. a)b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ c)d) $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Oppgave 33. a) $g'(x) = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ b) $m'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$ c) $s'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x + 1}}$

Oppgave 34. $\frac{111}{4}$

Oppgave 35. (vis ved å skrive $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$)

Oppgave 36. (f.eks. for derivasjon av en sum, skriv $(f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x) = f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)$)

Oppgave 37. a) $f''(x) = 0$ b) $g''(x) = 2a$ c) $h''(x) = 6ax + 2b$

Oppgave 38. a) konveks hvis $a > 0$, konkav hvis $a < 0$ b) hvis $a > 0$: f avtar på intervallet $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ og vokser på intervallet $[-\frac{b}{2a}, \infty)$; hvis $a < 0$: f vokser på intervallet $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ og avtar på intervallet $[-\frac{b}{2a}, \infty)$ c) maks-punkt hvis $a < 0$, minpunkt hvis $a > 0$

Oppgave 39. a) nullpunkt: $x = 0$, makspunkt: $x = 2$, minpunkt: $x = -2$, vendepunkt: $x = 0$, vokser: $[-2, 2]$, konkav: $[-2, 0]$, konveks: $[0, 2]$ b) nullpunkt: ingen, makspunkt: $x = 0$, vendepunkter: $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ og $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, vokser: $(-\infty, 0]$, avtar: $[0, \infty)$, konveks: $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}]$ og $[\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty)$, konkav: $[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}]$ c) nullpunkter: $x = -15$, $x = 9$ og $x = 0$, makspunkt: $x = -9$,

minpunkt: $x = 5$, vendepunkt: $x = -2$, vokser: $(-\infty, -9]$ og $[5, \infty)$, avtar: $[-9, 5]$, konkav: $(-\infty, -2]$, konveks: $[-2, \infty)$ **d**) nullpunkter: $x = -3$, $x = -1$ og $x = 4$, makspunkt: $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$, minpunkt: $x = \sqrt{\frac{13}{3}}$, vendepunkt: $x = 0$, vokser: $(-\infty, -\sqrt{\frac{13}{3}}]$ og $[\sqrt{\frac{13}{3}}, \infty)$, avtar: $[-\sqrt{\frac{13}{3}}, \sqrt{\frac{13}{3}}]$, konkav: $(-\infty, 0]$, konveks: $[0, \infty)$

Oppgave 40. **a)** makspunkt: $x = 1$ **b)** avtar: $(-\infty, 1]$ og $(1, \infty)$ **c)** f er ikke kontinuerlig for $x = 1$

Oppgave 42. **a)** vertikal asymptote: $x = 0$, horisontal asymptote: $y = 0$, avtar: $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$, konkav: $(-\infty, 0)$, konveks: $(0, \infty)$ **b)** vertikal asymptote: $x = 0$, horisontal asymptote: $y = 0$, vokser: $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$, konveks: $(-\infty, 0)$, konkav: $(0, \infty)$ **c)** vertikal asymptote: $x = -2$, horisontal asymptote: $y = 0$, vokser: $(-\infty, -2)$ og $(-2, \infty)$, konveks: $(-\infty, -2)$, konkav: $(-2, \infty)$ **d)** vertikale asymptoter: $x = -2$ og $x = 0$, horisontal asymptote: $y = 0$, vokser: $(-\infty, -2)$ og $(-2, -1]$, avtar: $[-1, 0)$ og $(0, \infty)$, lokalt makspunkt: $x = -1$, konveks: $(-\infty, -2)$ og $(0, \infty)$, konkav: $(-2, 0)$

Oppgave 43. 5625

Oppgave 44. $(\frac{O}{4})^2$ der O er den gitte omkretsen

Oppgave 45. **a)** 200 **b)** $\frac{a^2}{2}$

Oppgave 46. to lengder er 15 m og tre lengder er 10 m

Oppgave 47. **a)** 40 kr; 32 000 kr

Oppgave 48. $s = 6$ cm, $h = 3$ cm; 108 cm²

Oppgave 49. **a)** $\sum_{i=1}^{100} i$ **b)** $\sum_{i=1}^{50} 2i$ **c)** $\sum_{i=1}^{16} i^2$ **d)** $\sum_{i=0}^7 2^i$

Oppgave 50. **a)** $\frac{51}{4}$ **b)** $\frac{181}{27}$ **c)** $\frac{1}{9}$ **d)** $\frac{4}{9}$

Oppgave 51. **a)** $rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n+1}$ **b)** $ar^{n+1} - a = -a(1 - r^{n+1})$
c) an **d)** 255 **e)** 1

Oppgave 54. **a)** 3 **b)** $\frac{35}{4}$ **c)** 32

Oppgave 55. **a)** vokser: $(-\infty, -1)$, avtar: $(-1, \infty)$, vertikal asymptote: $x = -1$, horisontal asymptote: $y = 0$, konveks: $(-\infty, -1)$ og $(-1, \infty)$ **c)** $\frac{5}{6}$

Oppgave 56. $\frac{1}{12}$

Oppgave 58. **a)** $\frac{21}{2}$ **b)** $\frac{23}{3}$ **c)** $\frac{1}{4}$

Oppgave 59. **a)** $\frac{a}{2}x^2 + bx + C$ **b)** $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C$

- Oppgave 60.** a) $\frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{5}x^5 + x^2 - x + C$ b) $2\sqrt{x} + C$ c) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2x^2} + C$ d) $\frac{10}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{24}{7}x^{\frac{7}{3}} + C$
- Oppgave 61.** a) $\frac{1}{4}(x+3)^4 + C$ b) $\frac{1}{3}(2x^2+3)^3 + C$ c) $\frac{1}{5}(x^3+x)^5 + C$ d) $\frac{2}{3}(2x^2+2)^{\frac{3}{2}} + C$ e) $-\frac{1}{5x+1} + C$
- Oppgave 62.** a) $\frac{1}{32}(4x^2-1)^4 + C$ b) $-\frac{1}{28}(1-x^4)^7 + C$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$
- Oppgave 64.** a) $\frac{3}{4}x(x+2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{28}(x+2)^{\frac{7}{3}} + C$ b) $\frac{3}{2}x(x+2)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{10}(x+2)^{\frac{5}{3}} + C$
- Oppgave 65.** a) $\frac{x^2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(x^2+1)^{\frac{5}{2}} + C$ b) $\frac{58}{15}$
- Oppgave 66.** a) 2 b) $\frac{8}{3}$ c) 4
- Oppgave 67.** a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{9}{16}$
- Oppgave 68.** a) 8π b) $\frac{32}{5}\pi$ c) $\frac{2}{3}\pi$
- Oppgave 69.** $\frac{3}{10}\pi$
- Oppgave 71.** $A'(r) = 2\pi r$ (omkretsen); $V'(r) = 4\pi r^2$ (overflaten)
- Oppgave 72.** a) 1 b) 0 c) 2 d) -2 e) $\frac{3}{2}$
- Oppgave 73.** a) $x = \log_4 5$ b) $x = \log_5 50$ c) $x = \log_5 10$ d) $x = \frac{\log_5 2}{3}$
- Oppgave 74.** a) $x \approx 1,477$ b) $x \approx 2,477$ c) $x \approx 3,477$
- Oppgave 76.** a) 2 b) 4 c) $\frac{1}{2}$
- Oppgave 77.** a) $x = \frac{\ln 5}{\ln 4}$ b) $x = \frac{\ln 50}{\ln 5}$ c) $x = \frac{\ln 10}{\ln 5}$ d) $x = \frac{\ln 2}{3 \ln 5}$
- Oppgave 78.** a) $x = e^8 - 2$ b) $x = e^{\frac{8}{3}}$ c) $x = e^4$
- Oppgave 79.** a) $x = \frac{\ln 2}{2}$ b) $x = -\frac{\ln 4}{4}$ c) $x = \frac{\ln 2}{3}$
- Oppgave 80.** $f(-2) = e^2$, $f(-1) = e$, $f(0) = 1$, $f(1) = e^{-1}$, $f(2) = e^{-2}$
- Oppgave 81.** a) $g'(x) = 2e^{2x}$ b) $h'(x) = 6xe^{3x^2}$ c) $r'(x) = \frac{1}{x}$ d) $s'(x) = \frac{1}{2x}$
e) $f'(x) = e^{2x}(2x+1)$ f) $d'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ g) $q'(x) = \frac{2x^2}{x^2+3} + \ln(x^2+3)$
- Oppgave 82.** a) $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ b) $xe^x - e^x + C$ c) $-\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$
- Oppgave 83.** a) $\ln|x+2| + C$ b) $\ln(x^2+1) + C$ c) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$
- Oppgave 84.** a) en løsning b) ikke en løsning c) en løsning d) ikke en løsning e) en løsning
- Oppgave 85.** a) $y(x) = Ce^{-5x}$ b) $y(x) = 2 + Ce^{-2x}$ c) $y(x) = 1 + Ce^{-x^2}$ d) $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}$ e) $y(x) = x - 1 + Ce^{-x}$
- Oppgave 86.** $y(x) = Ce^{2x}$
- Oppgave 88.** a) lineær og separabel b) lineær og separabel c) separabel d) lineær
- Oppgave 89.** a) $y(x) = (x+C)^2$ b) $y(x) = (\frac{3}{4}x^2 + C)^{\frac{2}{3}}$
- Oppgave 90.** a) For hvert tidspunkt t forandres volumet. Denne forand-

ringen måles av $V'(t)$, som består av et positivt bidrag på 4 og et negativt bidrag på $kV(t)$ der $k > 0$. **b)** $V(t) = \frac{4}{k} - \frac{4}{k}e^{-kt}$ **c)** $V(t) = 800 - 800e^{-0,005t}$ **d)** $t = \frac{\ln 2}{0,005} \approx 138,6$; etter ca. 139 min (2t 19min)

Oppgave 91. **a)** $m(t) = Me^{-kt}$ **b)** $k = \frac{\ln 2}{5568}$ **c)** $t = \frac{(\ln \frac{4}{3}) \cdot 5568}{\ln 2} \approx 2310,9$; ca. 2311 år

Oppgave 92. **a)** Forandringen i antall innbyggere er til enhver tid proporsjonal med «roten av antall innbyggere». (Dette har vist seg å være en mulig modell for befolkningsvekst.) **b)** $P(t) = (\frac{k}{2}t + 1000)^2$ **c)** $k = 10$, $P(t) = (5t + 1000)^2$ **d)** ca. 45 år